Spectral Theory for 3-particle quantum systems with Constsnt[Constant] Magnetic Fields(Spectrum, Scattering and Related Topics)

岩下, 弘一

数理解析研究所講究録
第873巻 1994年 110-119

Spectral Theory for 3-particle quantum systems with Constsnt Magnetic Fields

名古屋工業大学 岩下　弘一 (HIROKAZU IWASHITA)

1. Introduction. 次の定数磁場 $B \in \mathbf{R}^3$を持つ 3 体シュレディンガー作用素のスペクトルを調べる.

$$H = \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2m_j} \left(-i\nabla_{r_j} - \frac{e_j}{2} B \times r_j \right)^2 + \sum_{1 \le i < j \le 3} V_{ij}(r_i - r_j)$$
$$=: H_0 + V(r)$$

ここに, $m_j > 0, r_j \in \mathbf{R}^3, e_j \in \mathbf{R}$ はそれぞれ, j 番目の粒子の質量, 位置ベクトル, 電荷を表す. 簡単のために, $B = (0,0,B), B > 0$ とする. ここでは, 全電荷がゼロである系を考える, 即ち, 次の仮定を置く:

(Q) $$e_1 + e_2 + e_3 = 0.$$

まずこの条件のもとで Hの重心分離を行う (Section 2). 重心分離については, 最初 Avron-Herbst-Simon [AHS] が, 特に, 2 体作用素に対して研究した. ここでは, ヤコビ座標を導入して精密に計算する. total pseudo-momentum $k \in \mathbf{R}^3$に対して $H(k)$ を Hの reduced center-of-mass Hamiltonian とする. 本稿の主な目的はこの $H(k)$ に対して Mourre estimate を導くことにある. 電荷の状態によって系の様子がかなり変わるために, 個々に扱うことにする. 即ち, どの電荷もゼロでない場合,

(Q.1) $$e_j \neq 0 \quad j = 1, 2, 3,$$

およびどれか一つの電荷がゼロの場合, 簡略化のために次のように限定する,

(Q.2) $$e_3 = 0$$

に分けて考える.

簡略化のために各ポテンシャルは有界かつ C^2級と仮定する. もちろんクーロンポテンシャル程度の **local singularity** は許される.

(A.I) $|\boldsymbol{r}| \to \infty$ のとき,

$$|V_{ij}(\boldsymbol{r})| + |z\partial_z V_{ij}(\boldsymbol{r})| = o(1),$$
$$|(z\partial_z)^2 V_{ij}(\boldsymbol{r})| = O(1).$$

ここに, $\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{r}_\perp, z) = (x, y, z)$.

(A.II) (i) $V_{12}(\boldsymbol{r})$ は, 次を満たす: $|z| \to \infty$ のとき,

$$|V_{12}(\boldsymbol{r})| + |z\partial_z V_{12}(\boldsymbol{r})| + |\partial_{x,y} V_{12}(\boldsymbol{r})| = o(1),$$
$$|(z\partial_z)^2 V_{12}(\boldsymbol{r})| + |\partial_{x,y}(z\partial_z) V_{12}(\boldsymbol{r})| + |\partial_{x,y}^2 V_{12}(\boldsymbol{r})| = O(1).$$

(ii) 他のポテンシャル $V_{ij}(\boldsymbol{r})$, $(i,j) \neq (1,2)$ は次の性質を持つ: $|\boldsymbol{r}| \to \infty$ のとき,

$$|V_{ij}(\boldsymbol{r})| + |(\boldsymbol{r} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}}) V_{ij}(\boldsymbol{r})| = o(1),$$
$$|(\boldsymbol{r} \cdot \nabla_{\boldsymbol{r}})^2 V_{ij}(\boldsymbol{r})| = O(1).$$

これらの仮定のもとで次の主定理を得る.

Theorem 1.1. (Q.1) の場合には (A.I) を, (Q.2) の場合には (A.II) を仮定する. このとき $H(k)$ に対して conjugate operator $A(k)$ が存在し, threshold points の集合 $\mathcal{T}$ を除いて Mourre estimate が成立する: $\forall \lambda \in \mathbf{R} \backslash \mathcal{T}$, $\exists$ an open interval $\Delta \subset \mathbf{R} \backslash \mathcal{T}$, $\Delta \ni \lambda$, $\exists C > 0$, $\exists$ a compact operator $K(k)$ such that

$$E_\Delta(H(k))[H(k), A(k)]E_\Delta(H(k)) \geq CE_\Delta(H(k)) + K(k). \tag{1.1}$$

ここに，$E_\Delta(H(k))$ は $H(k)$ に対するスペクトル測度である．したがって nonthreshold eigenvalues の離散性および特異連続スペクトルがないことがわかる．但し，$\mathcal{T}$は (Q.1) の場合には $k_\perp$には依存しない．

この結果に基づき，Dereziński [D] のアイデアに沿って議論すると，(Q.1) の場合には short-range potentials に制限すれば漸近完全性を示すことができる．

(Q.1) の場合には，基本的考え方は，磁場のない場合の 1 次元 3 体シュレディンガー作用素の場合に相当するが，重心分離の影響のため，ポテンシャルをどの作用素の摂動として捕らえるかが異なっている．(Q.2) の場合は，磁場がない場合とはまったく異なった状況が現れる．それは cluster 分割 $\{(1,2),3\}$ に対して，innercluster subsystem の運動に intercluster system のエネルギーが影響してくるというものである．しかしながら，intercluster system が free な作用素のためその正値性と innercluster subsystem のエネルギーに関する連続性ををうまく利用すれば，commutator の正値性を導くことができる．

われわれの結果とはまったく独立に Gérard-Łaba [GŁ] は N 体作用素に対して Mourre estimate を導き，short-range scattering を論じている．彼らは，全電荷がゼロである場合，そうでない場合を共に扱っている．また，全電荷がゼロでない場合には，電荷がゼロである粒子が存在することを許しているが，そのような粒子があっても本質的な違いはない．但し，どちらの場合も，すべての subsystem の全電荷はゼロではないという仮定を置いている．したがって，われわれの (Q.2) に対応する systems は取り扱っていない．彼らは基本的には重心分離を行なわないまま total Hamiltonian を扱っている．また，重心分離を行う際は，symplectic transforms を利用している．このため，磁場がない場合の取扱にかなり近い方法で証明を行っている．

2. Notation and separation of the center of mass. まず記号を導入しておく．Rを重心座標

$$R=\frac{1}{M}(m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+m_3\boldsymbol{r}_3),\ M=m_1+m_2+m_3$$

とし，配位空間 Xを

$$X=\{\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3)\in\mathbf{R}^{3\times3}|\ R=0\}$$

と定義する．Xの z軸に制限した空間を Zと，x,y変数空間に制限した空間を $X_\perp$と表すことにする．2-cluster 分割 $a=\{(i,j),\ell\}$, $i<j$に対して X上の座標 $\boldsymbol{r}=(\boldsymbol{r}^a,\boldsymbol{r}_a)\in X^a\oplus X_a$を

$$\boldsymbol{r}^a=\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j,\quad \boldsymbol{r}_a=\boldsymbol{r}_\ell-\frac{m_i\boldsymbol{r}_i+m_j\boldsymbol{r}_j}{m_i+m_j},$$

と定義する．$Z^a=X^a\cap Z$, $Z_a=X_a\cap Z$と置く．また，$p^a=-i\nabla_{\boldsymbol{r}^a}$, $q_a=-i\nabla_{\boldsymbol{r}_a}$と書く．$\mu^a$, ν_aを reduced mass とする：

$$\mu^a=\frac{m_im_j}{m_i+m_j},\quad \nu_a=\frac{m_\ell(m_i+m_j)}{M}.$$

ρを電荷の中心：$\rho=e_1\boldsymbol{r}_1+e_2\boldsymbol{r}_2+e_3\boldsymbol{r}_3$, e^a, τ_aを reduced charge とする：

$$e^a=\mu^a\left(\frac{e_i}{m_i}-\frac{e_j}{m_j}\right),\quad \tau_a=\nu_a\left(\frac{e_\ell}{m_\ell}-\frac{ei+e_j}{m_i+m_j}\right).$$

このとき，条件 (Q) により $\rho=e^a\boldsymbol{r}^a+\tau_a\boldsymbol{r}_a$, $\tau_a=e_\ell$となる．

$k\in\mathbf{R}^3$を pseudo-momentum: $k=-i\nabla_R+\frac{1}{2}B\times\rho$とし $\mathcal{H}=L^2(\mathbf{R}^{3\times3})$を次の direct integral で表す：

$$\mathcal{H}=\int_{\mathbf{R}^3}^{\oplus}dk\mathcal{H}_k,\quad \mathcal{H}_k\cong L^2(X).$$

このとき $\mathcal{H}_k$上の作用素である reduced center-of-mass Hamiltonian $H(k)$, $H(k)=H_0(k)+V(\boldsymbol{r})$は以下のように与えられる．まず，(Q.1) の場合には，

$$H_0(k)=\frac{1}{2\mu^a}\left[p^a-\frac{m_j^2e_i+m_i^2e_j}{2(m_i+m_j)^2}B\times\boldsymbol{r}^a+\frac{m_\ell}{2M}e^aB\times\boldsymbol{r}_a\right]^2$$
$$+\frac{1}{2\nu_a}\left[q_a-\frac{(m_i+m_j-m_\ell)e_\ell}{2M}B\times\boldsymbol{r}_a+\frac{m_\ell}{2M}e^aB\times\boldsymbol{r}^a\right]^2$$
$$+\frac{1}{2M}[k-B\times\rho]^2$$

と計算される．一方，(Q.2) の場合には，$a=\{(1,2),3\}$ に対して，

$$H_0(k)=\frac{1}{2\mu^a}\left[p^a-\frac{m_2-m_1}{2(m_1+m_2)}B\times\rho\right]^2+\frac{1}{2\nu_a}\left[q_a+\frac{m_3}{M}B\times\rho\right]^2+\frac{1}{2M}[k-B\times\rho]^2$$

となる．ただし，$\rho=e^a r^a$であることを注意しておく．異なった 2-cluster decomposition c に伴ったヤコビ座標を導入すれば別の表現が得られるが，磁場ポテンシャルの係数が変わるのみである．ただしこのときには，$\rho=e^c r^c+\tau_c r_c$, $\tau_c\neq 0$ である．

3. Mourre estimates. 基本的な考え方は，Froese-Herbst [FH] に従う (cf. Mourre [M])．$r\in X$を $r=(r_\perp,z)$, $r_\perp=(r^a_\perp,r_{a\perp})$, $z=(z^a,z_a)$ と書く．

3.1. まず (Q.1) の場合を取り扱う．conjugate operator $A(k)=A$ を

$$A=\frac{1}{2}(z\cdot\nabla_z+\nabla_z\cdot z)$$

と取る．次の性質が以下で重要となることに注意しておく．

Proposition 3.1.1. $\rho_\perp=e^a r^a_\perp+e_3 r_{a\perp}$と置くと，

$$|\rho_\perp|^2(H(k)+1)^{-1}$$

は bounded である．

この性質に注意しておけば，X上の適当な 1 の分解を用いて，$H(k)$ に対する Mourre estimate(1.1) は $H_a(k)=H_0(k)+V_a(r^a)$ および $H_0(k)$ に対するものを示すことに帰着される．$H_0(k)$ を

$$H_0(k)=\frac{1}{2}\Delta_z+H_0(k)_\perp+\frac{1}{2M}k_z^2\quad\text{on}\quad L^2(X_\perp\times Z)$$

と分解しておく．さらに，$H_0(k)_\perp + V_a(r^a)$ は $H_0(0)_\perp + V_a(r^a)$ に unitarily equivalent であることに注意しておく．この注意から，$H_0(k)_\perp$ のスペクトルについて次のことがわかる．

Proposition 3.1.2.

$$
\begin{aligned}
\sigma(H_0(k)_\perp) &= \sigma_p(H_0(k)_\perp) \\
&= \mathcal{T}_0 := \left\{ \sum_{j=1}^{3} \frac{|e_j|B}{2m_j}(2n_j+1) \,\middle|\, n_j = 0,1,2,\ldots, j = 1,2,3 \right\}
\end{aligned}
$$

$H_a(k)$ に対して Mourre estimate を導こう．さらに記号を導入する．two-cluster 分割 a 対して

$$
\begin{aligned}
h_0 &= \frac{1}{2\mu^a}(p_z^a)^2 + H_0(k)_\perp + \frac{1}{2M}k_z^2 \quad \text{on} \quad L^2(X_\perp \times Z^a), \\
h^a &= h_0 + V_a, \\
A^a &= \frac{i}{2}(z^a p_z^a + p_z^a z^a), \\
\widetilde{\mathcal{T}_0} &= \mathcal{T}_0 + \frac{1}{2M}k_z^2, \\
d_0(\lambda) &= \operatorname{dist}(\lambda, \widetilde{\mathcal{T}_0} \cap (-\infty, \lambda]).
\end{aligned}
$$

と定義すると，

Theorem 3.1.3. $\forall \lambda \in \mathbf{R}^1$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists$ an open interval $\Delta \ni \lambda$ such that 次の Mourre estimate が成立する：

$$
E_\Delta(h_0)[h_0, A^a]E_\Delta(h_0) \geq 2(d_0(\lambda) - \varepsilon)E_\Delta(h_0).
$$

また，Propsosition 3.1.1 を用いて，

Lemma 3.1.4. V_a および $[V_a, A^a]$ は h_0−compact.

を得る．Theorem 3.1.3, Lemma 3.1.4 によって次の結果を得る．

Theorem 3.1.5. (1) $\forall\lambda \in \mathbf{R}$, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists$ an open interval $\Delta \ni \lambda$, a compact operator K such that

$$E_\Delta(h^a)[h^a, A^a]E_\Delta(h^a) \geq 2(d_0(\lambda) - \varepsilon)E_\Delta(h^a) + K.$$

(2) 集合$\widetilde{\mathcal{T}_a} := \sigma_p(h^a)$ は，$\mathbf{R}\backslash\widetilde{\mathcal{T}_0}$において離散的で，集合 $\mathcal{T}_a := \widetilde{\mathcal{T}_a} - \frac{1}{2M}k_z^2$ は pseudo-momentum kには依存しない．

さて

$$\mathcal{T} = \bigcup_{\sharp a=2} \mathcal{T}_a \bigcup \mathcal{T}_0, \quad \tilde{\mathcal{T}} = \mathcal{T} + \frac{1}{2M}k_z^2, \tag{3.1.1}$$
$$d(\lambda) = \mathrm{dist}(\lambda, \tilde{\mathcal{T}} \cap (-\infty, \lambda]),$$

と置けば，[FH] の議論に従って，次の結果を得る．

Theorem 3.1.6. $\forall\lambda \in \mathbf{R}$, $\forall\varepsilon > 0$, $\exists$ an open interval $\Delta \ni \lambda$ such that

$$E_\Delta(H_a(k))[H_a(k), A]E_\Delta(H_a(k)) \geq 2(d(\lambda) - \varepsilon)E_\Delta(H_a(K)).$$

3.2. 次に (Q.2) の場合を考える．まず，two-cluster 分割 a を $a \neq \{(1,2),3\}$ とすると，3.1節の場合と同様にして，ポテンシャル V_aは h_0−com -pact であることが確かめられるが，$a = \{(1,2),3\}$ の場合にはそうはなっていないことに注意する．aを $a = \{(1,2),3\}$ と固定して，conjugate operator $A(k)$ を次のように定義する：$A(k) = A_z + A(k)_\perp$. ここに，

$$A_z = \frac{1}{2}(z \cdot \nabla_z + \nabla \cdot z) \quad \text{on} \quad L^2(Z),$$

$$A(k)_\perp = \frac{i}{2}(r_{a\perp} \cdot q_{a\perp} + q_{a\perp} \cdot r_{a\perp}) + \frac{1}{e_1}\frac{B}{|B|^2} \times \left(q_a + \frac{m_3}{M}k\right) \cdot ip^a$$
$$+ \frac{m_2 - m_1}{2(m_1 + m_2)e_1}(\rho_\perp - 2\beta) \cdot iq_a + \frac{im_3}{M}k_\perp \cdot \left\{\frac{m_2 - m_1}{2(m_1 + m_2)}r_\perp^a + r_{a\perp}\right\}$$
$$\text{on} \quad L^2(X_\perp).$$

ただし，$\beta = k \times B/|B|^2$. このとき，

$$[H_0(k), A(k)] = -\Delta_z + \frac{1}{m_3}\left(q_{a\perp} + \frac{m_3}{M}k_\perp\right)^2,$$
$$[V_a, A(k)] = -iz^a p_z^a V_a - ip^a V_a \cdot \frac{1}{e_1}\frac{B}{|B|^2} \times \left(q_a + \frac{m_3}{M}k\right)$$

と計算される．$H_c(k)$, $c \neq \{(1,2),3\}$ に対して **Mourre estimates** が導かれることは，上の注意から容易に類推できるだろう．

さて，$H_0(k)$ はそののままでは取り扱いにくいために，適当なユニタリー変換により $H_0(k)$ を $G_0(k_z)$ に変換する：

$$G_0(k_z) = h_0(k_z) \otimes Id + Id \otimes t_a \quad \text{on} \quad L^2(X^a) \otimes L^2(X_a),$$

ここに，

$$h_0(k_z) = \frac{1}{2\mu^a}\left[p^a - \frac{m_2 - m_1}{2(m_1 + m_2)}e_1 B \times r^a\right]^2 + \frac{e_1^2}{2(m_1 + m_2)}|B \times r^a|^2 + \frac{1}{2M}k_z^2,$$
$$t_a = \frac{1}{2\nu_a}q_{az}^2 + \frac{1}{2m_3}q_{a\perp}^2.$$

この $h_0(k_z)$ の形から，$h_0(k_z)_\perp = h_0(k_z) - (p_z^a)^2/2\mu^a$ のスペクトルは固有値のみであることがわかる．またこの変換のもとで $V_a(r^a)$ は，モーメント q_a を $q_a = \eta$ と固定したときに，

$$V_a(r^a; k_\perp, \eta_\perp) = V_a\left(r^a + \frac{1}{e_1}(\beta + \gamma)\right), \quad \gamma = \eta \times B/|B|^2$$

と変換される．また **conjugate operator** $A(k)$ は

$$A_0 = A_z^a + \frac{i}{2}(r_a \cdot q_a + q_a \cdot r_a), \quad A_z^a = \frac{i}{2}(z^a p_z^a + p_z^a z^a)$$

と変換されることに注意しておく．空間 $\mathcal{H}_k$ を **direct integral**

$$\mathcal{H}_k = \int_{\mathbf{R}^3}^{\oplus} d\eta \mathcal{H}_{k\eta}$$

で表す. $G_a(k) = G_0(k_z) + V_a(k_\perp, q_{a\perp})$ と置く. $\mathcal{H}_{k\eta}$上で

$$
\begin{aligned}
[G_a(k), A_0](\eta) = \frac{1}{\mu^a}(p_z^a)^2 - z^a i p_z^a V_a(r^a; k, \eta) \\
- \frac{1}{e_1}\frac{B}{|B|^2} \times \eta \cdot i p^a V_a(r^a; k, \eta) + \frac{1}{\nu_a}\eta_z^2 + \frac{1}{m_3}\eta_\perp^2
\end{aligned} \tag{3.2.1}
$$

が成立する. これから, $h^a = h^a(k, \eta_\perp) = h_0(k_z) + V_a(k_\perp, \eta_\perp)$ on $\mathcal{H}_{k\eta}$は A_z^a を conjugate operator として Mourre estimate を満たすことがわかる. このとき明らかに$\sigma_p(h^a)$は$\eta_\perp$に依存する. 従って, 通常のように, (3.1.1) のような距離関数 $d(\lambda)$ を用いて (3.2.1) から $G_a(k)$ に対する Mourre estimate を導くことができない.

しかしながら, $h^a(k, \eta_\perp)$ が$\eta_\perp$について resolvent の意味で連続であることにより, Mourre estimate から固有値の安定性が導かれる. 即ち, $|\eta_\perp|^2$ が十分小さければ, $\sigma_p(h^a(k, \eta_\perp))$ は$\sigma_p(h^a(k, 0_\perp))$ の十分小さな近傍に含まれる. これと t_aが positive であることを用いれば, (3.2.1) から $G_a(k)$ に対して Mourre estimate を導くことができる.

以上の詳細は [Iw] を参照ください.

References.

[AHS] Avron, J., Herbst, I., Simon, B.: Separation of center of mass in homogeneous magnetic fields. Ann. Phys. **114**(1978), 431-451.

[D] Dereziński, J.: Asymptotic completeness of long range N-body quantum systems. Ann. Math. **138**(1993), 427-476.

[FH] Froese, R., Herbst, I.: A new proof of the Mourre estimate. Duke Math. J. **49**(1982), 1075-1085.

[GŁ] Gérard, C., Łaba, I.: Scattering theory for N-particle systems in constant magnetic fields. preprint(1993).

[Iw] Iwashita, H.: Spectral theory for 3-particle quantum systems with constant magnetic fields. preprint(1993).

[M] Mourre, E.: Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators. Commun. Math. Phys. **78**(1981), 391-408.